Opción A

1..-Dada la función **f(x) = ax^2 + bx + c,** determinar los valores de **a , b** y **c** para que se cumplan las siguientes condiciones:

i) Que la gráfica de **f(x)** pase por el punto **(0 , 4)**

ii) Que la recta **y = - 4x + 7** sea tangente a la gráfica en el punto de abcisa **x = 4**

[2.5 puntos]

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$\begin{cases} f(0) = 4 \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 4 \Rightarrow c = 4 \\ f(4) = -4 \cdot 4 + 7 = -9 \Rightarrow a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + 4 = -9 \Rightarrow 16a + 4b = -13 \Rightarrow \begin{cases} 16a + 4b = -13 \\ -16a - 2b = 8 \end{cases} \Rightarrow 2b = -5 \Rightarrow \\ f'(4) = -4 \Rightarrow 2a \cdot 4 + b = -4 \Rightarrow 8a + b = -4 \end{cases}$$

$$b = -\frac{5}{2} \Rightarrow 8a - \frac{5}{2} = -4 \Rightarrow 8a = \frac{5}{2} - 4 \Rightarrow 8a = -\frac{3}{2} \Rightarrow a = -\frac{3}{16} \Rightarrow$$

$$f(x) = -\frac{3}{16}x^2 - \frac{5}{2}x + 4$$

2.- Para la fabricación de un determinado producto, se necesita invertir dinero en contratar operarios y comprar máquinas. El dueño de la fábrica ha estimado que si compra **"y"** máquinas y contrata **"x"** operarios, el número de unidades de producto que se pueden fabricar viene dado por la función $P = 105 \cdot x \cdot y^2$. Cada máquina le supone una inversión de **2000 €** y cada contrato de un operario le cuesta **1600 €.** Si el empresario solo dispone de un presupuesto de **12000 €** . Determina el número de operarios que debe de contratar y el número de máquinas que debe de comprar para maximizar la producción. **[2.5 puntos]**

$$\begin{cases} 12000 = 2000y + 1600x \Rightarrow 120 = 20y + 16x \Rightarrow 30 = 5y + 4x \Rightarrow 4x = 30 - 5y \Rightarrow x = \dfrac{30 - 5y}{4} \\ P = 105 \cdot x \cdot y^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$P = 105 \cdot \frac{30 - 5y}{4} \cdot y^2 = \frac{525}{4} \cdot \left(6y^2 - y^3\right) \Rightarrow P' = \frac{dP}{dy} = \frac{525}{4} \cdot \left(12y - 3y^2\right) = \frac{1575}{4} \cdot \left(4y - y^2\right)$$

$$P' = \frac{1575}{4} \cdot y(4 - y) \Rightarrow P' = 0 \Rightarrow \frac{1575}{4} \cdot y(4 - y) = 0 \Rightarrow y(4 - y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 4 - y = 0 \Rightarrow y = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$P'' = \frac{1575}{4} \cdot (4 - 2y) = \frac{3150}{4} \cdot (2 - y) = \frac{1575}{2} \cdot (2 - y) \Rightarrow \begin{cases} P''(0) = \dfrac{1575}{2} \cdot (2 - 0) = 1575 > 0 \Rightarrow Mínimo \\ P''(4) = \dfrac{1575}{2} \cdot (2 - 4) = -1575 < 0 \Rightarrow Máximo \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 4 \text{ máquinas} \\ x = \dfrac{30 - 5 \cdot 4}{4} = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2} \text{ contratos} \end{cases}$$

3.- Resolver la ecuación **AX = B^t + 2I,** siendo: $A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 4 & -3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

[2.5 puntos]

$$AA^{-1}X = A^{-1}\left(B^t-2I\right)\Rightarrow X = A^{-1}\left(B^t-2I\right)$$

$$|A|=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 4 & -3\end{vmatrix}=9-4=5\Rightarrow \exists A^{-1}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot adj\left(A^t\right)\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 1 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow adj\left(A^t\right)=\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -4 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -4 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow X=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -4 & -3\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -4 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 4\\ -1 & -4\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$X=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}1 & -8\\ 3 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & -\frac{8}{5}\\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\end{pmatrix}$$

4.- Dadas las siguientes rectas

$$r:(x\ ,y\ ,z)=(-8\ ,-4\ ,5)+\lambda(-2\ ,1\ ,-2)\ y\ s:\begin{cases}4y-3x=8\\ 4z-5x=60\end{cases}$$

a) Comprobar que se cortan en un punto y hallar sus coordenadas **[1.5 puntos]**
b) Hallar la ecuación de la recta paralela a **s** y que pasa por el punto **(1 , 0 , - 1) [1punto]**

$a)$

$$\begin{cases} r\equiv\begin{cases}x=-8-2\lambda\\ y=-4+\lambda\\ z=5-2\lambda\end{cases} \\ \begin{cases}4y=8+3x\Rightarrow y=\dfrac{8+3x}{4}=2+\dfrac{3}{4}x\\ 4z=60+5x\Rightarrow z=\dfrac{60+5x}{4}=15+\dfrac{5}{4}x\end{cases}\Rightarrow \vec{v_s}=\left(1\ ,\dfrac{3}{4}\ ,\dfrac{5}{4}\right)\equiv(4\ ,3\ ,5)\Rightarrow s\equiv\begin{cases}x=4\alpha\\ y=2+3\alpha\\ z=15+5\alpha\end{cases}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\vec{v_r}=(-2\ ,1\ ,-2)\\ \vec{v_s}=(4\ ,3\ ,5)\end{cases}\Rightarrow\frac{-2}{4}\neq\frac{1}{3}\Rightarrow No\ son\ paralelas\ ni\ coincidentes$$

$Veamos\ si\ se\ cortan$

$$\begin{cases}-8-2\lambda=4\alpha\\ -4+\lambda=2+3\alpha\\ 5-2\lambda=15+5\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda+2\alpha=-4\\ \lambda-3\alpha=6\\ 2\lambda+5\alpha=-10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda+2\alpha=-4\\ -\lambda+3\alpha=-6\end{cases}\Rightarrow 5\alpha=-10\Rightarrow\alpha=-2\Rightarrow\lambda-4=-4\Rightarrow\lambda=0\Rightarrow$$

$$2\cdot 0+5\cdot(-2)=-10\Rightarrow -10=-10\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado\Rightarrow$$

$$Punto\ de\ corte\ de\ r\ y\ s\Rightarrow P\begin{cases}x=-8-2\cdot 0\\ y=-4+0\\ z=5-2\cdot 0\end{cases}\Rightarrow P(-8\ ,-4\ ,5)$$

b)

Llamando t a la recta buscada

$$\overrightarrow{v_t} = \overrightarrow{v_s} = (4\ ,3\ ,5) \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\beta \\ y = 3\beta \\ z = -1 + 5\beta \end{cases}$$

Opción B

1..-Hallar los valores de **m** para que la función: $f(x)=\begin{cases} m^2\cdot sen\ x\ , & si\ x\le 0 \\ e^{-mx}-1\ , & si\ x>0\end{cases}$ sea derivable en toda la recta real **[2.5 puntos]**

Para que sea derivable debe de ser continua en todo el recorrido de la función y el valor de la derivada en el posible punto de discontinuidad el mismo.

$$\begin{cases} f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=m^2\cdot sen\ 0=m^2\cdot 0=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=e^{-m\cdot 0}-1=e^0-1=1-1=0\end{cases}\Rightarrow f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$$

$$f'(x)=\begin{cases} m^2\cdot cos\ x\ , & si\ x<0 \\ -(-m)e^{-m\cdot x}\ , & si\ x\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=m^2\cdot cos\ 0=m^2\cdot 1=m^2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=m\cdot e^{-m\cdot 0}=m\cdot e^0=m\cdot 1=m\end{cases}\Rightarrow$$

$$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)\Rightarrow m^2=m\Rightarrow m^2-m=0\Rightarrow m(m-1)=0\Rightarrow\begin{cases} m=0 \\ m-1=0\Rightarrow m=1\end{cases}\Rightarrow$$

$$Puede\ ser\ dos\ funciones\Rightarrow\begin{cases} f(x)=\begin{cases} 0^2\cdot sen\ x\ , & si\ x<0 \\ e^{-0\cdot x}-1, & si\ x\ge 0\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases} 0, & si\ x<0 \\ 0, & si\ x\ge 0\end{cases}\Rightarrow \\ f(x)=\begin{cases} 1^2\cdot sen\ x\ , & si\ x<0 \\ e^{-1\cdot x}-1, & si\ x\ge 0\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases} sen\ x, & si\ x<0 \\ e^{-x}-1, & si\ x\ge 0\end{cases}\Rightarrow\end{cases}$$

2.- Calcular : a) $\int_0^2 x\cdot\sqrt{2x^2+1}\ dx$ **[0.75 puntos]** b) $\int\frac{x^2+3}{x^2-2x}\ dx$ **[1.75 puntos]**

$a)$

$$\int_0^2 x\cdot\sqrt{2x^2+1}\ dx=\int_1^3 t\cdot\frac{1}{2}t\ dt=\frac{1}{2}\int_1^3 t^2\ dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[t^3\right]_1^3=\frac{1}{6}\cdot\left(3^3-1^3\right)=\frac{26}{6}=\frac{13}{3}$$

$$2x^2+1=t^2\Rightarrow 4x\ dx=2t\ dt\Rightarrow x\ dx=\frac{1}{2}t\ dt\Rightarrow\begin{cases} Si\ x=0\Rightarrow t^2=1\Rightarrow t=1 \\ Si\ x=2\Rightarrow t^2=9\Rightarrow t=3\end{cases}$$

Continuación del Problema 2 de la opción B

b)

$$I=\int\frac{x^2+3}{x^2-2x}\,dx=\int dx+\int\frac{2x+3}{x(x-2)}\,dx=x-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x}+\frac{7}{2}\int\frac{dx}{x-2}=x-\frac{3}{2}\cdot\ln x+\frac{7}{2}\int\frac{dt}{t}$$

$$x-2=t\Rightarrow dx=dt$$

$$\begin{array}{r|l} x^2+3 & x^2-2x \\ \hline -x^2+2x & 1 \\ \hline 2x+3 & \end{array}$$

$$\frac{2x+3}{x(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+Bx}{x(x-2)}\Rightarrow A(x-2)+Bx=2x+3\Rightarrow\begin{cases}A+B=2\\-2A=3\end{cases}\Rightarrow$$

$$A=-\frac{3}{2}\Rightarrow-\frac{3}{2}+B=2\Rightarrow B=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$$

$$I=x-\frac{3}{2}\cdot\ln x+\frac{7}{2}\cdot\ln t=x-\frac{3}{2}\cdot\ln x+\frac{7}{2}\cdot\ln(x-2)=x-\ln\sqrt{\frac{(x-2)^7}{x^3}}+K$$

3.- Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema, y en caso posible resolverlo:

$$\begin{cases}3x-2y+z=1\\ x+3z=-2\\ 3x-4y-7z=8\end{cases}$$ **[2.5 puntos]**

$$|A|=\begin{vmatrix}3&-2&1\\1&0&3\\3&-4&-7\end{vmatrix}=-18-4+36-14=0\Rightarrow Puede\ ser\ Compatible\ Indeterminado\ o\ Incompatible$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&-2&1&1\\1&0&3&-2\\3&-4&-7&8\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}3&-2&1&1\\-3&0&-9&6\\-3&4&7&-8\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}3&-2&1&1\\0&-2&-8&7\\0&2&8&-7\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}3&-2&1&1\\0&-2&-8&7\\0&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

Solución

$$-2y+8z=7\Rightarrow-2y=7-8z\Rightarrow y=-\frac{7}{2}+4z\Rightarrow 3x+7-8z+z=1\Rightarrow 3x=-6+7z\Rightarrow x=-2+\frac{7}{3}z$$

$$Solución\left(-2+\frac{7}{3}\lambda\ ,-\frac{7}{2}+4\lambda\ ,\lambda\right)$$

4.- Dada la recta $r: \frac{x-3}{2}=\frac{y}{3}=z+1$ y los puntos **A(1 , 1 , 0)** y **B(2 , 0 , -3)**

a) Halla la ecuación general del plano que contiene a la recta **r** y al punto **A** **[1.25 puntos]**

b) Hallar el ángulo formado por la recta **r** y la recta que pasa por los puntos **A** y **B** **[1.25 puntos]**

$$r \equiv \begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=3\lambda \\ z=-1+\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(2\,,3\,,1) \\ R(3\,,0\,,-1) \end{cases}$$

a)

El plano π pedido esta generado por el vector de la recta **r,** el vector formado por el punto **A**, uno cualquiera de la recta **r** (hemos tomado el punto **R** indicado en la ecuación de la recta) y el vector formado por **A** y el punto genérico **G** del plano pedido, como estos tres vectores son coplanarios el .determinante formado por ellos tiene valor nulo y es la ecuación pedida

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(2\,,3\,,1) \\ \overrightarrow{AR}=(3\,,0\,,-1)-(1\,,1\,,0)=(2\,,-1\,,-1) \\ \overrightarrow{AG}=(x\,,y\,,z)-(1\,,1\,,0)=(x-1\,,y-1\,,z) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$-3\cdot(x-1)+2\cdot(y-1)-2z-6z+(x-1)+2\cdot(y-1)=0 \Rightarrow -2\cdot(x-1)+4\cdot(y-1)-8z=0 \Rightarrow$$

$$2x-4y+8z+2=0 \Rightarrow \pi \equiv x-2y+4z+1=0$$

b)

Primeramente analizaremos si tienen un punto de corte, si no es así no se podrá calcular el ángulo

El coseno del ángulo que forman las rectas **r** y la que forman **A** y **B** es el producto escalar de ellos dos dividido por el producto de los módulos de ambos.

$$\overrightarrow{AB}=(2\,,0\,,-3)-(1\,,1\,,0)=(1\,,-1\,,-3) \Rightarrow AB \equiv \begin{cases} x=2+\alpha \\ y=-\alpha \\ z=3-3\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{3}{-1} \Rightarrow$$

$$r \text{ y } \overline{AB} \text{ no son paralelos ni coincidentes}$$

$$\text{Veamos si tienen punto común o de corte}$$

$$\begin{cases} 2+\alpha=3+2\lambda \\ -\alpha=3\lambda \\ 3-3\alpha=-1+\lambda \end{cases} \Rightarrow 2-3\lambda=3+2\lambda \Rightarrow 5\lambda=-1 \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{5} \Rightarrow \alpha=-3\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{5} \Rightarrow 3-3\cdot\frac{3}{5}=-1-\frac{1}{5} \Rightarrow$$

$$3-\frac{9}{5}=-\frac{6}{5} \Rightarrow -\frac{9}{5}=-\frac{6}{5} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado} \Rightarrow \text{Se cortan en un punto}$$

$$\cos\beta=\frac{\left|\overrightarrow{v_r}\,\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{\left|(2\,,3\,,1)\cdot(1\,,-1\,,-3)\right|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+(-3)^2}}=\frac{\left|2\cdot1+3\cdot(-1)+1\cdot(-3)\right|}{\sqrt{4+9+1}\cdot\sqrt{1+1+9}}=\frac{\left|2-3-3\right|}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{11}}$$

$$\cos\beta=\frac{|-4|}{\sqrt{154}}=\frac{4\sqrt{154}}{154}=\frac{2\sqrt{154}}{77} \Rightarrow \beta=\arccos\left(\frac{2\sqrt{154}}{77}\right)=71^{o}11'46''$$